Transformations intégrales
(Fourier, Laplace, Mellin)

__But__ : résolution d'EDP/EDO linéaires

__Philosophie__ :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{éq. diff pour } f \arrow[r, "\text{transf. } \mathcal{F}", "①"'] \arrow[d, squiggly, "?"'] & \text{eq. diff. (ou algébrique) plus simple pour } \hat{f} \arrow[d, "②"'] \\
\text{solution } f & \text{solution } \hat{f} \arrow[l, "\text{transformation inverse } \mathcal{F}^{-1}"', "③"]
\end{tikzcd}$$

__Exemple 1__ : équation de chaleur

① $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\quad u(x,0) = u_0(x)$

Transformation de Fourier p.r. à x :

$$u(x,t) \mapsto \hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t)\right\}}_{=0} e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \omega^2 u\right) e^{-i\omega x}\, dx = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right) \hat{u}(\omega,t)$$

② Solution de $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \omega^2\right) \hat{u}(\omega,t) = 0$: (EDO)

$$\hat{u}(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\, \hat{u}(\omega,0)$$

$$= e^{-\omega^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x')\, e^{-i\omega x'}\, dx'$$

③ Transformée inverse :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \hat{u}(\omega,t)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x - \omega^2 t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x'}\, u_0(x')\, dx'\right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t + i\omega(x-x')}\, d\omega\right) u_0(x')\, dx'.$$

Exemple 2 : (plus simple, EDO à coef. constants).

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

① Introduisons à la place de $y(x)$ sa transformée de Fourier :

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-i\omega x} dx$$

Quelle est l'équation pour $\hat{y}(\omega)$?

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \right) y(x) \right\} e^{-i\omega x} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{on intègre} \\ \text{par parties} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(a_n (-1)^n (-i\omega)^n + a_{n-1} (-1)^{n-1} (-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0 \right)}_{\text{const}} y(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$(1) \qquad = \underbrace{\left(a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0 \right)}_{\text{équation caractéristique}} \hat{y}(\omega) = 0$$

② Si on cherche $\hat{y}(\omega)$ parmi les fonctions habituelles, on obtient forcement $\hat{y}(\omega) = 0$. Par contre, si on se permet de considérer les distributions, on a des solutions nontriviales, notamment

$$\hat{y}(\omega) = c_1 \delta(\omega - \omega_1) + c_2 \delta(\omega - \omega_2) + \dots + c_n \delta(\omega - \omega_n)$$

où $\omega_1, \dots \omega_n$ sont les racines de l'équation caractéristique. On vérifie facilement que (1) est satisfaite.

③ On applique la transformée inverse :

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{y}(\omega) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left(c_1 \delta(\omega - \omega_1) + \dots + c_n \delta(\omega - \omega_n) \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(c_1 e^{i\omega_1 x} + c_2 e^{i\omega_2 x} + \dots + c_n e^{i\omega_n x} \right)$$

§ 1. Transformation de Fourier

On définit 2 transformations suivantes :

- $\mathcal{F}$, appelée transformation de Fourier :

$$f \mapsto \mathcal{F} f = \hat{f}, \quad (\mathcal{F} f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

- $\overline{\mathcal{F}}$, appelée transformation de Fourier inverse :

$$\hat{f} \mapsto \overline{\mathcal{F}} \hat{f}, \quad (\overline{\mathcal{F}} \hat{f})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} dt$$

Dans le premier cours, nous avons déjà donner une démonstration (pas complètement rigoureuse) que, effectivement, $\overline{\mathcal{F}}$ est l'inverse de $\mathcal{F}$. Ceci peut être vu également en utilisant les séries de Fourier :

1). Considérons une fonction f de période T, continue et C^1 par morceaux. Alors $f(t) = S_f(t)$, d'où

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i n \cdot \frac{2\pi}{T} t},$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-i n \cdot \frac{2\pi}{T} t'} dt'.$$

2). Donc en substituant

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-in\frac{2\pi}{T} t'} dt' \right) e^{in\frac{2\pi}{T} t}$$

Dans l'expression de c_n, considérons la limite

$$n \to \infty, \; T \to \infty, \quad \frac{2\pi n}{T} \to \nu$$

Alors

$$c_n \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\nu t'} dt' \approx \frac{1}{T} \hat{f}(\nu)$$

D'autre part

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\frac{2\pi}{T} t} = \left| \begin{array}{l} \text{si } n \text{ varie de } 1, \\ \nu \text{ varie peu} \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} e^{i\nu t} \hat{f}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\nu t} \hat{f}(\nu) \left\{ \frac{2\pi}{T}(n+1) - \frac{2\pi}{T} \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\nu t}\, \hat{f}(\nu)\, \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu t}\, \hat{f}(\nu)\, d\nu .$$

Conclusion: la transformation de Fourier est l'analogue des séries de Fourier de fonctions T-périodiques lorsque $T \to \infty$.

séries de Fourier	transformée de Fourier
$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$
$\lvert c_n(f)\rvert$ est l'amplitude de l'harmonique de rang n dans le signal $f(t)$.	$\lvert\hat{f}(\omega)\rvert$ mesure l'importance de la composante ω dans le spectre de fréquences
$f(t) = S_f(t)$? (n'est pas vrai pour toutes $f \in C^0$ par morceaux)	$f(t) = (\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}_f)(t)$? (le résultat n'est pas vrai pour toutes $f \in L^1$)

Propriétés:

1). $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ (l'aire algébrique comprise entre la courbe $f(t)$ et l'axe t)

2). Linéarité:

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}_f + \mu \mathcal{F}_g \qquad \forall f, g \in L^1,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

3). Parité :

$$\mathcal{F}_{f(-t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt = \hat{f}(-\omega)$$

donc si f est paire ou impaire, alors $\hat{f}(\omega)$ l'est aussi.

4). Partie réelle - partie imaginaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1 = \operatorname{Re} f$ et $f_2 = \operatorname{Im} f$.

Notons $\hat{f} = \hat{X} + i\hat{Y}$, où $\hat{X} = \operatorname{Re}\hat{f}$, $\hat{Y} = \operatorname{Im}\hat{f}$.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 + i f_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 \cos\omega t + f_2 \sin\omega t)\, dt$$

$$+ i\int_{-\infty}^{\infty} (f_2 \cos\omega t - f_1 \sin\omega t)\, dt$$

Donc :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t)\,dt$$

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_2(t)\cos\omega t - f_1(t)\sin\omega t)\,dt$$

Si f est à valeurs réelles ($f_2 = 0$) :

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \hat{x}(-\omega)$$

$$\hat{y}(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(\omega) = -\hat{y}(-\omega)$$

Alors : si f est réelle $\Rightarrow$ i). partie réelle de la TF est paire
ii). partie imaginaire de la TF est impaire

De plus, si f est réelle paire $\Rightarrow \hat{y}(\omega) = 0$ (TF est réelle paire)
impaire $\Rightarrow \hat{x}(\omega) = 0$ (TF est imaginaire pure et impaire).

5). Conjugaison.

$$\hat{\bar{f}}(\omega) = \mathcal{F}\,\bar{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1\cos\omega t - f_2\sin\omega t)\,dt +$$

$$+\, i\int_{-\infty}^{\infty} (-f_2\cos\omega t - f_1\sin\omega t)\,dt =$$

$$= \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

6). Changement d'échelle.

La TF de $g(t) = f(at)$ $(a \in \mathbb{R})$ est

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,e^{-i\omega t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\omega u/a}\,du, & a > 0 \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\omega u/a}\,du, & a < 0 \end{cases}$$

Donc $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{|a|}\,\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

Théorème 3. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire, $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < \infty$)
$\hat{f}(\omega)$ est bornée, continue et tend vers 0 lorsque $|\omega| \to \infty$.

$$|\hat{f}(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\, e^{-i\omega t}|\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L_1} < \infty.$$

Démonstration de continuité et de la décroissance pour $|\omega| \to \infty$ est difficile

Théorème 4. 1). Si f est n fois continûment dérivable, avec les dérivées d'ordre $\leq n$ dans $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$(\mathcal{F} f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)$$

et $|\omega|^k\, |\hat{f}(\omega)| \leq \|f^{(k)}\|_{L^1} \quad \forall k \leq n.$

2). Si $t^n f(t)$ est intégrable, alors $\mathcal{F} f$ est n fois continûment dérivable (p.r. à ω); de plus,

$$\mathcal{F}\left((-it)^k f(t)\right) = \left(\mathcal{F} f\right)^{(k)} = (\hat{f})^{(k)}$$

1.1). Montrons que $f(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$. En effet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} |f'(t)|\, dt < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} f'(t)\, dt < \infty$$

Donc $f(t) - f(0) = \int_0^t f'(u)\, du \Rightarrow \lim_{t \to \infty} f(t) = \ell < \infty$

(d'après le précédent)

Si $\ell \neq 0 \Rightarrow f \notin L^1$ (contradiction). Donc $\ell = 0$.

Même procédure pour $t \to -\infty$.

1.2). $$\int_A^B f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \left[f(t)\, e^{-i\omega t}\right]_A^B + i\omega \int_A^B f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

donc, grâce aux résultats précédents:

$$\lim_{A, B \to \infty} \int_A^B f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

d'où $\mathcal{F} f' = i\omega \mathcal{F} f$. De la même manière, $\mathcal{F} f'' = i\omega \mathcal{F} f' = (i\omega)^2 \mathcal{F} f$ etc. Donc $\forall k \leq n \quad \mathcal{F} f^{(k)} = (i\omega)^k \mathcal{F} f$.

Comme

$$|(i\omega)^k\, \mathcal{F} f| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(t)|\, dt,$$

on obtient $|\mathcal{F} f| \leq \|f^{(k)}\|_{L^1} / |\omega|^k$.

Conclusion : Plus f est dérivable (avec les dérivées intégrables), plus $\hat{f}(\omega)$ décroit vite à l'infini.

Remarque 5 : En particulier, le raisonnement ci-dessus permet de démontrer que $\hat{f}(\omega) \to 0$ lorsque $|\omega| \to \infty$ (ça constitue une partie du Thm. 3) sous l'hypothèse supplémentaire que f' est continue et intégrable.

Théorème 6 : (inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ satisfaisant une des hypothèses suivantes :

1). sur tout intervalle $[a,b]$, f est à variation bornée.

2). sur tout intervalle $[a,b]$, f est C^1 par morceaux (c'est-à-dire, f et f' sont continues par morceaux).

Alors

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

Remarques :

- lorsque, en plus des hypothèses 1 ou 2 du théorème, f est continue, alors

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t)$$

- attention : $\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ peut avoir une limite sans que l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\, d\omega$ existe. Par contre si $\hat{f} \in L^1$, alors effectivement

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

- donc si f vérifie l'hypothèse 1 ou 2 du théorème, est continue, et si de plus $\hat{f} \in L^1$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t)$$ | formule d'inversion de la TF

Théorème 7 (analogue de l'identité de Parseval)

Soit $f \in L^1 \cap L^2$ (notons qu'il n'y a pas de relation d'inclusion entre L^1 et L^2). Alors :

1). $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

2). $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega$$

3). $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \, d\omega.$$

Remarque : $f \in L^2$ est nécessaire déjà pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ existe.